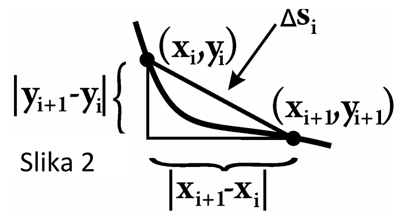
Postupak parametrizacije krive pri računanju krivolinijskog integrala

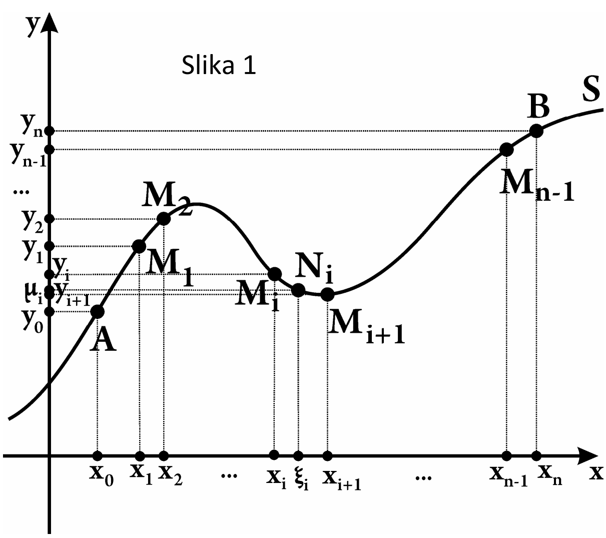
Krivolinijski integral prve vrste (po luku)

1. Definicija krivolinijskog integrala po luku



Slika 2

Neka je $\overset{\frown}{AB} = s$ orjentisani luk[1] neke neprekidne krive S u xOy ravni, koja se može rektificirati[2], i neka je $f(x, y)$ neprekidna funkcija definisana[3] na luku $\overset{\frown}{AB} = s$ krive S (vidi sliku 1).



Slika 1

Napravimo podjelu luka $\overset{\frown}{AB}$ na n parcijalnih lukova tačkama $A \equiv M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,..., $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$,..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $B \equiv M_n(x_n, y_n)$ i na svakom parcijalnom luku $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ uzmimo po jednu proizvoljnu tačku $N_i(\xi_i, \mu_i)$. Označimo sa Δs_i vrijednost $\Delta s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ (primjetimo da Δs_i predstavlja približnu dužinu parcijalnog luka $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ (vidi sliku 2)).

Formirajmo zbir

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \mu_i)\Delta s_i = f(\xi_0, \mu_0)\Delta s_0 + f(\xi_1, \mu_1)\Delta s_1 + \ldots + f(\xi_{n-1}, \mu_{n-1})\Delta s_{n-1}$$

koji se prostire na sve parcijalne lukove $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$. Granična vrijednost ovog zbira (pod uslovom da je konačna), kada se broj parcijalnih lukova $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ uvečava beskonačno, tako da njihova dužina teži nuli (a time i Δs_i teži nuli), zove se **krivolinijski integral funkcije**

---

[1] orjentisan luk - luk za koji smo jedan kraj odredili da je početak luka i a drugi kraj luka

[2] rektificirati - naivno rečeno ako "isravimo" krivu ona će biti konačne dužine. Definicija rektifikacije krive u ravni je sljedeća: Neka je dat luk AB koji je podjeljen na n parcijalnih lukova tačkama $A \equiv M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,..., $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$,..., $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $B \equiv M_n(x_n, y_n)$. Ovu podjelu označimo sa $P = \{M_0, M_1, \ldots M_n\}$. Ako je suma $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$ ograničena za sve podjele P luka $\overset{\frown}{AB}$ tada za luk kažemo da se može rektificirati. Neprekidna nerektificibijalna fija je npr. $f(x) = x\cos(\pi/(2x))$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

[3] definisana - funkcija $f(x, y)$ u svakoj tački $M(x, y)$ luka $\overset{\frown}{AB}$ ima određenu konačnu vrijednost

$f(x,y)$ **<u>po luku</u>** s **<u>(ili duž luka</u>** $\overset{\frown}{AB}$ **<u>) krive</u>** S i obilježava se sa $\int\limits_{s} f(x,y)\,ds$ (ili sa $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds$).

Prema tome

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\mu_i)\Delta s_i = \lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{\Delta s_i} f(\xi_i,\mu_i)\Delta s_i$$

2. Jedna primjena krivolinijskog integrala po luku

Ako u definiciji krivolinijskog integrala umjesto funkciju $f(x,y)$ stavimo 1 (jedinična funkcija - funkcija koja ima vrijednost 1 za sve realne x i y) dobićemo

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 1\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta s_i = \lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{\Delta s_i}\Delta s_i$$

a odavde vidimo da krivolinijski integral $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$ <u>predstavlja dužinu luka</u> $s=\overset{\frown}{AB}$.

3. Postupak parametrizacije

Postavljamo pitanje: Zašto datu krivu uopšte i trebamo parametrizirati? Odgovor na ovo pitanje se nalazi u Teoremi 1. Poslije spomenute teoreme nameće se novo pitanje: Može li se krivolinijski integral izračunati i bez parametrizacije?

<u>Teorema 1</u>

Neka je kriva $\overset{\frown}{AB}=s$ data u obliku parametarskih jednačina $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\le t\le\beta$, neka je glatka[4] i neka nema singularnih[5] tački. Dalje, neka je funkcija $f(x,y)$ neprekidna na luku s . Tada važi formula

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\,.$$

Dokaz:

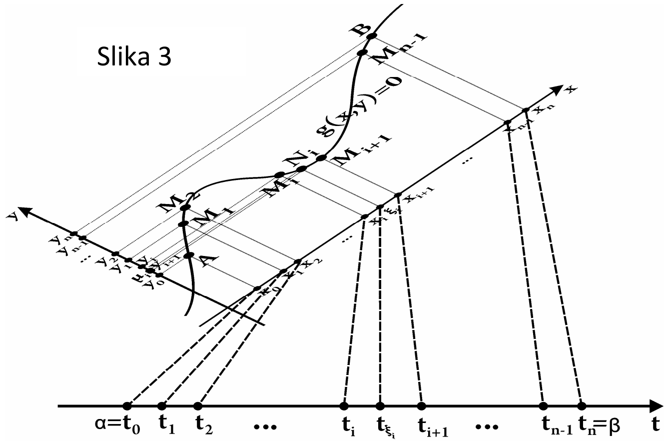
Pokušajmo objasniti šta za koordinatu x krive $g(x,y)=0$ znači kada je data u parametarskom obliku $x=\varphi(t),\ \alpha\le t\le\beta$. To znači da su vrijednosti $x_0, x_1, ..., x_n$ (x - koordinate tačaka $M_0, M_1, ..., M_n$ krive $g(x,y)=0$) jedinstveno određena sa parametrom t . Pa recimo neka je interval $[\alpha,\beta]$ podjeljen sa $\alpha=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=\beta$ tako da vrijedi $x_k=\varphi(t_k),\ \ k=1,2,...,n.$ (vidi sliku 3). Slična priča je i sa koordinatom y , s napomenom da je funkcija $\psi(t)$ po definiciji takva da vrijediti $y_k=\psi(t_k)$, za $k=1,2,...,n.$

---

[4] glatka - za funkciju kažemo da je glatka ako u svakoj tački ima izvod. Grafički to znači da funkcija nema "čoškova".

[5] singularna tačka - tačka (x_0,y_0) naziva se singularnom tačkom krive $F(x,y)=0$ ako je $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$. Tačke na krivoj koje nisu singularne nazivaju se običnim tačkama krive

Sad posmatrajmo Δs_i i napišimo $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\Delta s_i$ pomoću novih parametarskih promjenjivih. Po definiciji je $\Delta s_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$. Tačka (x_0,y_0) u novim oznakama ima oblik $(\varphi(t_0),\psi(t_0))$, tačka (x_1,y_1) postaje $(\varphi(t_1),\psi(t_1))$, ... , tačka (x_n,y_n) postaje $(\varphi(t_n),\psi(t_n))$. U novim ozakama Δs_i ima oblik $\Delta s_i=\sqrt{(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))^2+(\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))^2}$. Uvedimo oznaku $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ i primjetimo sljedeće



Slika 3

$$\Delta s_i=\Delta t_i\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\sqrt{(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))^2+(\psi(t_{i+1})-\psi(t_i))^2}=\Delta t_i\sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2+\left(\frac{\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2}$$

Prema definiciji izvoda znamo da $\lim\limits_{t\to p}\frac{\varphi(p)-\varphi(t)}{p-t}=\varphi'(p)$, pa možemo zaključiti da

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta s_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2+\left(\frac{\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2}\,\Delta t_i=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

(jasno je da $t_i\to t_{i+1}$ kad $n\to\infty$)[6]. Iskoristimo ovo i uvedimo parametarske jednačine $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\le t\le\beta$ u našu početnu formulu $\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds$ (prisjetimo se $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $\mu_i\in[y_i,y_{i+1}]$ su proizvoljne tačke).

[6] ovdje smo iskoristili definiciju Rimanovog integrala. Radi cjeline teksta navedimo jednu od definicija Riman-Stiltjesovog integrala: Neka je $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ particija intervala $[a,b]$, $\Delta\alpha_k\overset{def}{=}\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})$ i neka je t_k tačka podintervala $[x_{k-1},x_k]$. Sumu oblika $S(P,f,\alpha)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(t_k)\Delta\alpha_k$ zovemo Riman-Stiltjesova suma funkcije f s obzirom na α . Kažemo da je f Riman-integrabilna s obzirom na α ako postoji broj A koji ima sljedeće osobine: Za svako $\varepsilon>0$ postoji particija P_ε intervala $[a,b]$ takva da za svaku particiju P finiju od P_ε i za svaki izbor tački $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ imamo $|S(P,f,\alpha)-A|<\varepsilon$.

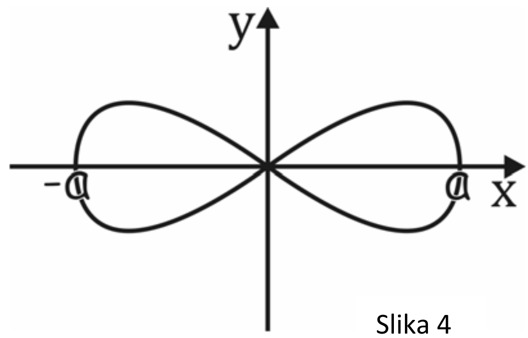
$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\mu_i)\Delta s_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i(t_{\xi_i}),\mu_i(t_{\mu_i}))\sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2+\left(\frac{\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2}\,\Delta t_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(t_{\xi_i}),\psi(t_{\mu_i}))\sqrt{\left(\frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2+\left(\frac{\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2}\,\Delta t_i =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

što je i trebalo dobiti. Time je dokaz završen.



Slika 4

Zadatak broj 1

Izračunati krivolinijski integral $\oint_c |y|\,ds$ gdje je kriva c lemniskata $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (vidi sliku 4).

Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti na četri načina. Na osnovu Teoreme 1, ako je $x=\mu(t), y=\eta(t), t_1 \le t \le t_2$ parametarski oblik krive C, krivolinijski integral $\oint_C f(x,y)ds$ računamo po formuli:

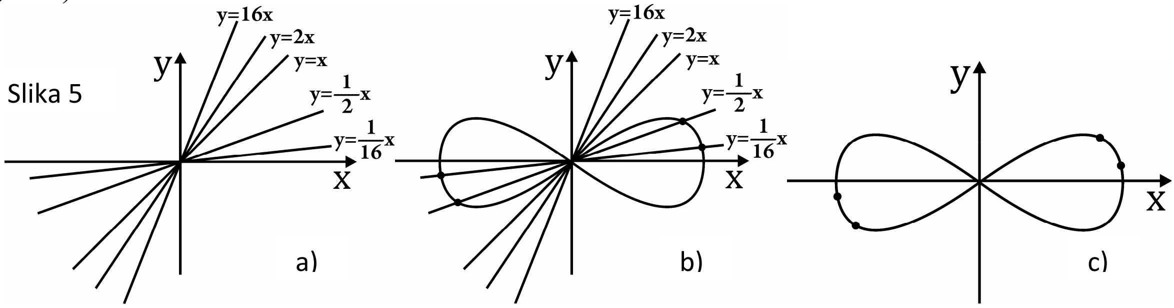
$$\oint_C f(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\mu(t),\eta(t))\sqrt{(\mu'(t))^2+(\eta'(t))^2}\,dt\,.$$

Prema tome, da bi izračunali dati integral potrebno je datu lemniskatu parametrizirati. Postupak parametrizacije ćemo pokazati na četri različita načina.

I način (parametrizacija pomoću pravih)

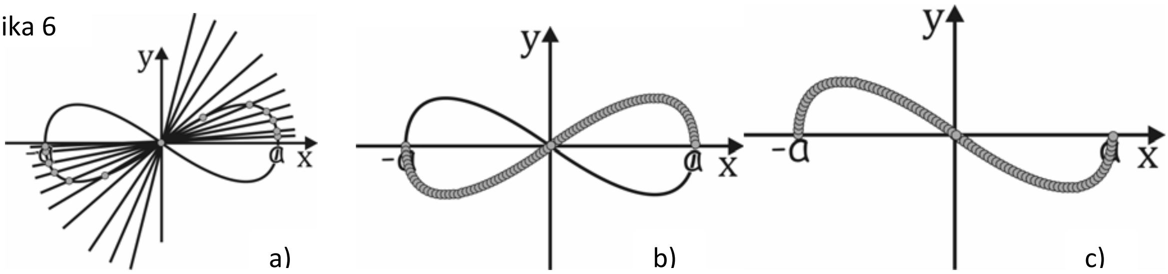
Posmatrajmo nekoliko proizvoljnih pravih u ravni recimo prave $y=\frac{1}{16}x$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=x$, $y=2x$, $y=16x$. Skice grafika ovih pravih u $x0y$ ravni izgledaju kao na slici 5a). Ako pokušamo naći presječne tačke ovih pravih sa lemniskatom imaćemo nešto kao na slikama 5b) i 5c).

Slika 5



Data prava sa lemniskatom može imati najviše dvije zajedničke tačke (vidi sliku 6a)). Ako pustimo da parametar k iz familije pravih $y=kx$ uzima vrijednost od 0 do $+\infty$ i za svako fiksirano k nađemo presječnu tačku prave sa lemniskatom, imali bi otprilike grafik kao na slici 6b).

Slika 6



Na isti način ako posmatramo prave oblika $y = kx$ gdje je $-\infty < k < 0$ dobili bi grafik kao na slici 6c).

Prema tome lemniskatu c: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ možemo napisati u obliku

$$(x^2+(kx)^2)^2 = a^2(x^2-(kx)^2)$$

$$(x^2+k^2x^2)^2 = a^2(x^2-k^2x^2)$$

$$(1+k^2)^2x^4 = a^2(1-k^2)x^2 \quad / : x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2(1-k^2)}{(1+k^2)^2}$$

$$x = \pm\frac{a\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2} \Rightarrow y = \pm\frac{ka\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2}$$

Iz zadnje dvije jednakosti možemo zaključiti da je parametarski oblik lemniskate

$$c: \begin{cases} x = \pm\dfrac{a\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2} \\ y = \pm\dfrac{ka\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2} \\ -1 \le k \le 1 \end{cases}$$

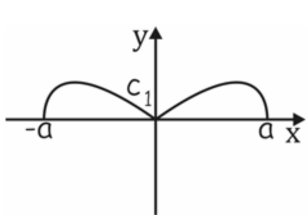
Pitanje: Zašto smo stavili da je $k \in [-1,1]$?

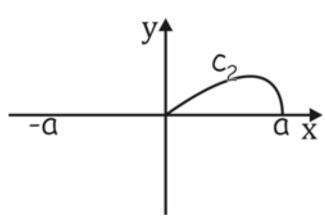
Izračunajmo dati integral:

$$\oint_c |y|\,ds = \left|\begin{matrix} zbog\ simetričnosti\ lemniskate \\ u\ odnosu\ na\ x-osu \end{matrix}\right| = 2\oint_{c_1} |y|\,ds =$$

$$= \left|\begin{matrix} zbog\ simetričnosti\ lemniskate \\ u\ odnosu\ na\ y-osu \end{matrix}\right| = 2\cdot 2\oint_{c_2} |y|\,ds = 4\oint_{c_2} |y|\,ds$$

gdje je





Dalje imamo

$$x = \pm \frac{a\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2} \Rightarrow x_k^{'} = \frac{ak(k^2-3)}{(1+k^2)^2\sqrt{(1-k^2)}}$$

$$y = \pm \frac{ka\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2} \Rightarrow y_k^{'} = \frac{-a(3k^2-1)}{(1+k^2)^2\sqrt{(1-k^2)}}$$

$$x_k^{'2} + y_k^{'2} = \frac{-a^2}{k^4-1} = \frac{a^2}{1-k^4}$$

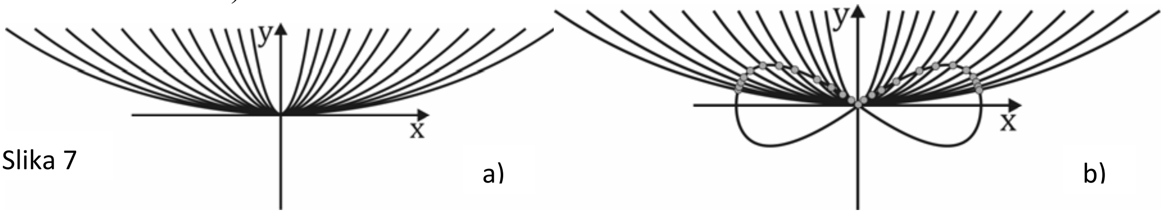
$$\sqrt{x_k^{'2} + y_k^{'2}} = \frac{a}{\sqrt{1-k^4}}$$

$$\oint_c |y|\, ds = 4\oint_{c_2} |y|\, ds = 4\int_0^1 |y| \sqrt{x_k^{'2} + y_k^{'2}}\, dk = 4\int_0^1 \frac{ka\sqrt{(1-k^2)}}{1+k^2} \frac{a}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1+k^2}}\, dk =$$

$$= 4a^2 \int_0^1 \frac{k}{(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}\, dk = ... = 4a^2(-\frac{1}{2})(\sqrt{2}-2) = 2a^2(2-\sqrt{2})$$

II način (parametrizacija pomoću parabole)

Parametarizirajmo lemniskatu uz pomoć familije parabola $y = px^2$, čiji su grafici otprilike oblika kao na slici 7a).



Slika 7

za $0 \le p < +\infty$. Ako fiksiramo p i posmatramo presjek lemniskate sa parabolom, kao rezultat imamo najviše dvije zajedničke tačke. Sad ako pustimo da p uzima vrijednosti od 0 do $+\infty$ i za svako fiksirano p nađemo presječnu tačku parabole i lemniskate, imali bi otprilike sljedeći grafik presječnih tački: vidi sliku 7b).

Slična priča važi i za slučaj kada posmatramo familiju $y = -px^2$ za vrijednosti $0 \le p < \infty$.

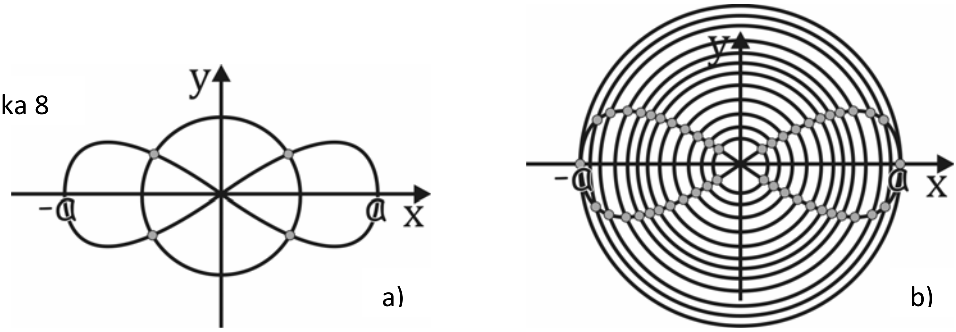
Sad ako stavimo smjenu $y = \pm px^2$ u jednačinu lemniskate $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ možemo dobiti jednačinu lemniskate u parametarskom obliku. Mi ćemo, radi složenosti, formulu izostaviti, a čitalac se upućuje da je izvede.

Isto tako napomenimo da dobijeni parametarski oblik lemniskate na ovaj način, u našem zadatku, ne pomaže da integral izračunamo na lagan način.

III način (parametrizacija pomoću krugova)

Parametarizirajmo lemniskatu uz pomoć familije krugova. Lemniskata $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ u presjeku sa nekim krugom može da ima najviše četri zajedničke tačke (vidi sliku 8a)).

Slika 8



Od ranije znamo da je jednačina kruga u parametarskom obliku sljedeća $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$. Ako pustimo da r uzima vrijednosti od 0 do a, a φ da uzima vrijednosti od 0 do 2π i za svaki dobijeni krug nađemo presječne tačke kruga i lemniskate, imali bi otprilike grafik kao na slici 8b).

Stavimo smjenu $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ u jednačinu lemniskate. Imamo

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$$

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \qquad / : r^2$$

$$r^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$r = a\sqrt{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Prema tome jednačina lemniskate u parametarskom obliku izgleda ovako

$$c : \begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \cos\varphi \\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \sin\varphi \\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Pitanje: Zašto smo stavili ograničenje za φ?

Sad imamo

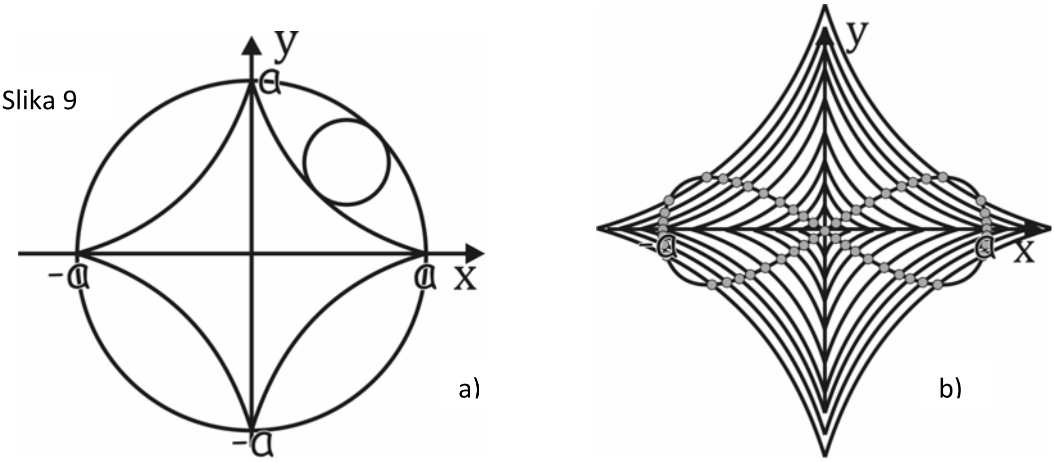
$$\oint_c |y|\,ds = \left| \begin{matrix} lemniskata\ c\ je\ simetri\check{c}na \\ u\ odnosu\ na\ x\ i\ y-osu \end{matrix} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \sin\varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,d\varphi = 2a^2(2-\sqrt{2})$$

<u>IV način (parametrizacija pomoću astroide)</u>

Parametarski oblik astroide je $\begin{cases} x = p\cos^3 t \\ y = p\sin^3 t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$. Ako posmatramo familiju astroida u kojima parametari p i t uzimaju vrijednost $0 \le p < \infty$ i $0 \le t \le 2\pi$ i napravimo presjek te familije sa lemniskatom imaćemo grafik kao na slici 9a).

Slika 9



Prema tome lemniskatu možemo parametrizirati ako uvedemo smjene $x = p\cos^3 t$ i $y = p\sin^3 t$ u jednačinu $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Radi složenosti, parametarski oblik lemniskate dobijen na ovaj način izostavljamo. Čitalac se upućuje da pokuša izvesti datu formulu.

Isto tako, parametrizacija na ovaj način ne pomaže nam za lagano izračunavanje datog integrala.

Krivolinijski integral druge vrste vrste (po luku)

Najčešći način rješavanja krivolinijskog integrala II vrste po nekoj konturi c je parametrizacija te konture, tj. napisati jednačinu krive c u parametarskom obliku. Kao osnovne primjere parametrizacije imamo:

— jednačinu kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, čiji je centar tačka $S(p,q)$ i poluprečnik $r>0$, čiji je parametarski oblik $x=p+r\cos t \wedge y=q+r\sin t, 0\le t\le 2\pi$;

— jednačinu elipse $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ sa poluosama $a>0$ i $b>0$, čiji je parametarski oblik $x=p+a\cos t \wedge y=q+b\sin t, 0\le t\le 2\pi$;

— jednačinu hiperbole $\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$, čiji je parametarski oblik $x=p+\frac{a}{\cos t} \wedge y=q+b\operatorname{tg} t, t\in[-\pi,\pi], t\ne\pm\frac{\pi}{2}$; Za desnu granu ove hiperbole (tj. ako je $x>p$) možemo koristiti i parametarske jednačine određene hiperboličkim funkcijama $x=p+a\operatorname{ch} t \wedge y=q+b\operatorname{sh} t, t\in(-\infty,+\infty)$.

<u>**Primjeri 1**</u>: Izračunati krivolinijske integrale

a) $I_1=\int\limits_c (x^2+y)dx+(y^2+z)dy+(z^2+x)dz$, ako je c pozitivno orjentisana kontura elipse $x^2+y^2=4,\ x+z=2$.

Rješenje: Iz jednačine $x^2+y^2=4$ slijedi $x=2\cos t, y=2\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$, a iz $x+z=2$ slijedi $z=2-x=2-2\cos t=2(1-\cos t)$. Dakle,

$$x=2\cos t \Rightarrow dx=-2\sin t dt$$

$$y=2\sin t \Rightarrow dy=2\cos t dt$$

$$z=2(1-\cos t)\Rightarrow dz=2\sin t dt.$$

Dobija se integral

$$I_1=\int_0^{2\pi}(4\cos^2 t+2\sin t)(-2\sin t)dt+\int_0^{2\pi}(4\sin^2 t+2-2\cos t)2\cos t dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}(4-8\cos t+4\cos^2 t+2\cos t)2\sin t dt.$$

Nakon sređivanja podintegralnih izraza i spajanja u jedan integral dobijamo

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(-4 + 4\cos t + 8\sin t - 12\sin t\cos t + 8\sin^2 t\cos t\right) dt$$

Ovaj integral se svodi na $\int_0^{2\pi} (-4)\, dt = -8\pi$, jer integracija po ostalim sabircima daje nulu.

---

b) $I_2 = \int_c 2xydx + z^2 dy + x^2 dz$, ako je c pozitivno orjentisana kontura elipse

$2x^2 + 2y^2 = z^2, x + z = a,\ a > 0.$

Rješenje: Projekcija konture na xOy ravan daje nam jednačinu

$$2x^2 + 2y^2 = (a-x)^2 \Leftrightarrow (x+a)^2 + 2y^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{(x+a)^2}{2a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Time dobijamo parametrizaciju

$$x + a = a\sqrt{2}\cos t, y = a\sin t, z = a - x = a - \left(a\sqrt{2}\cos t - a\right) = a\left(2 - \sqrt{2}\cos t\right), 0 \le t \le 2\pi.$$

Osim toga, $dx = -a\sqrt{2}\sin tdt, dy = a\cos tdt, dz = a\sqrt{2}\sin tdt$, pa je integral I_2 jednak

$$\int_0^{2\pi} \left[2a^2 \sin t\left(\sqrt{2}\cos t - 1\right)\left(-a\sqrt{2}\right)\sin t + a^2\left(2 - \sqrt{2}\cos t\right)^2 a\cos t + a^2\left(\sqrt{2}\cos t - 1\right)^2 a\sqrt{2}\sin t \right] dt$$

Sređivanjem izraza i rješavanjem integrala dobija se $I_2 = -2a^3\pi\sqrt{2}$.

---

c) $I_3 = \int_c z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz$, ako je c pozitivno orjentisana kriva

$x^2 + y^2 = 2ax, z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}},\ a > 0.$

Rezultat: $I_3 = -2a^2\pi$.

---

d) $I_4 = \int_c \left(y^2 + z^2\right) dx + \left(x^2 + z^2\right) dy + \left(x^2 + y^2\right) dz$, ako je c gornja petlja $(z \ge 2)$ krive

$x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, pozitvno orjentisana.

Rezultat: $I_4 = -\dfrac{32}{3}$.

U slučaju da je kriva c data jednačinom u implicitnom obliku $f_n(x,y)=g_{n-1}(x,y)$, gdje su f_n, odnosno g_{n-1} homogeni polinomi stepena n, odnosno $n-1$, možemo uvesti parametar t stavljajući $y=tx$, nakon čega se rješava x i y preko t.

Primjeri 2: Izračunati površinu figure u ravni koja je određena krivom

a) $x^3+y^3=3axy, a>0$ (Dekartov list)

Rješenje: Ako je $y=tx$, tada je $x^3(1+t^3)=3atx^2 \Rightarrow x=\dfrac{3at}{1+t^3} \Rightarrow y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

Dakle, parametrizacijom Dekartovog lista dobijamo parametarski oblik jednačine te krive $x=\dfrac{3at}{1+t^3} \wedge y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}, t\geq 0$. Diferenciranjem slijedi:

$$dx=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt \text{ i } dy=\frac{3a(2t-2t^4)}{(1+t^3)^2}dt.$$

Tražena površina jednaka je

$$P=\frac{1}{2}\int_c xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3a(2t-2t^4)}{(1+t^3)^2}-\frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right)dt=\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}.$$

Posljednji integral se lako riješi smjenom $1+t^3=z$. Dobija se $P=\dfrac{3a^2}{2}$.

b) $(x+y)^4=ax^2y,\ a>0.$

Rješenje: Ako je $y=tx$, tada je $x^4(1+t)^4=atx^3 \Rightarrow x=\dfrac{at}{(1+t)^4} \Rightarrow y=\dfrac{at^2}{(1+t)^4}$.

Zato je $dx=\dfrac{a(1-3t)}{(1+t)^5}dt$ i $dy=\dfrac{a(2t-2t^2)}{(1+t)^5}dt$, pa je površina figure jednaka

$$P=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{at}{(1+t)^4}\cdot\frac{a(2t-2t^2)}{(1+t)^5}-\frac{at^2}{(1+t)^4}\cdot\frac{a(1-3t)}{(1+t)^5}\right)dt=\frac{a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2+t^3}{(1+t)^9}dt=\frac{a^2}{2}\int_0^\infty\frac{t^2}{(1+t)^8}dt.$$

Uzimajući smjenu $1+t=z$, slijedi:

$$P=\frac{a^2}{2}\int_1^\infty\frac{(z-1)^2}{z^8}dt=\frac{a^2}{2}\left(\int_1^\infty\frac{dz}{z^6}-2\int_1^\infty\frac{dz}{z^7}+\int_1^\infty\frac{dz}{z^8}\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=\frac{a^2}{210}.$$

c) $(x+y)^{2n+1}=ax^ny^n,\ a>0, n\in\mathbb{N}.$

Rezultat: $P=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{\binom{2n}{k}}{4n-k+1}.$

d) $x^3+y^3=x^2+y^2.$

Rezultat: $P=\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$

Neke krive, kao npr. lemniskata imaju najjednostavniju jednačinu u polarnim koordinatama. To može biti polazna osnova da tu krivu napišemo u parametarskom obliku.

Primjeri 3:

a) Izračunati integral $I=\int_c y^2dx+z^2dy+x^2dz,$ ako je c dio tzv. Vivianijeve krive dobijene u presjeku sfere $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ i cilindra $x^2+y^2=ax,$ za $z\geq 0,$ prolazeći u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, ako se posmatra sa pozitivnog dijela $(x>a)$ ose Ox.

Rješenje: Prelazeći na polarne koordinate formulama $x=r\cos\varphi\wedge y=r\sin\varphi$ jednačina cilindra $x^2+y^2=ax$ se transformiše u $r=a\cos\varphi.$ Zbog poznate činjenice da je $r\geq 0,$ imamo da je $\cos\varphi\geq 0\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}.$

Jednačina sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ se transformiše u $r^2+z^2=a^2\Rightarrow z=\sqrt{a^2-r^2}$ (imajući u vidu da je $z\geq 0$). Sada smo u prilici napisati jednačinu Vivianieve krive u parametarskom obliku – parametar će biti φ.

$$x=r\cos\varphi=(a\cos\varphi)\cos\varphi=a\cos^2\varphi;$$

$$y=r\sin\varphi=(a\cos\varphi)\sin\varphi=a\sin\varphi\cos\varphi;$$

$$z=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}=\sqrt{a^2\left(1-\cos^2\varphi\right)}=\sqrt{a^2\sin^2\varphi}=a|\sin\varphi|.$$

Treba uzeti u obzir da zbog $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ veličina $\sin\varphi$ može biti i pozitivna i negativna, pa prilikom vađenja posljednjeg korjena uzimamo apsolutnu vrijednost.

Dalje slijedi:

$$dx=-2a\sin\varphi\cos\varphi d\varphi,$$

$$dy=a\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)d\varphi=a\cos 2\varphi d\varphi,$$

$dz = \operatorname{sgn}\varphi \cdot a\cos\varphi d\varphi, \varphi \neq 0.$

Uvrštavajući u polazni integral dobićemo:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cdot(-2)a\sin\varphi\cos\varphi + a^2\sin^2\varphi\cdot a\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + a^2\cos^4\varphi\cdot\operatorname{sgn}\varphi\cdot\right.$$

$$\left.\cdot a\cos\varphi\right]d\varphi$$

$$= a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi + \operatorname{sgn}\varphi\cos^5\varphi\right)d\varphi.$$

Pošto je $-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \operatorname{sgn}\varphi\cos^5\varphi$ neparna funkcija od φ, integral po tim sabircima je nula. Ostaje nam

$$I = a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi\right)d\varphi = a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)d\varphi = a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\cos 2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi d\varphi}_{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\varphi d\varphi\right) = -\frac{a^3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 4\varphi\right)d\varphi = -\frac{a^3\pi}{4}.$$

b) Izračunati površinu figure ograničene lemniskatom $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$, $a>0.$

Rješenje: Jednačina lemniskate u polarnim koordinatama je $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (vidi sliku i izvođenje jednačine u zadatku br 1). Desna petlja lemniskate ($x \geq 0$) se dobije za $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a lijeva ($x \leq 0$) za $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Sada možemo kao u a) napisati parametarski oblik jednačine lemniskate, uzimajući kao parametar ugao φ:

$$x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow dx = a\left(-\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - \cos\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)d\varphi = -a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi;$$

$$y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow dy = a\left(\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - \sin\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)d\varphi = a\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi.$$

Zbog simetričnosti lemniskate dovoljno je računati jednu četvrtinu njene površine, ako je $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Dakle,

$$\frac{1}{4}P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot a\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\left(-a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)\right]d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\varphi\cos 3\varphi + \sin\varphi\sin 3\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}.$$

Otuda je tražena površina $P = a^2$.

Parametarski oblik jednačine lemniskate može se dobiti i uvrštavanjem $y = x\operatorname{tg} t$ u jednačinu $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

Dobija se identična forma $x = a\cos t\sqrt{\cos 2t}$, $y = a\sin t\sqrt{\cos 2t}$.

c) Izračunati $I = \int_c (x+y)dx - (x-y)dy$, ako je c petlja krive $r = a\cos 3\varphi$, $a > 0$, od tačke $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ do tačke $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Rezultat: $I = -\frac{a^2\pi}{3}$.

Literatura

[1] T. Pejović; <u>Matematička analiza IV</u>, četvrto izdanje; Građevinska knjiga, str. 1-32, 1965.

[2] T. M. Apostol; <u>Mathematical Analysis</u>, second edition; Addison-Wesley, str. 140-174, 2004.

[3] D. Adnađević, Z. Kadelburg; <u>Matematička analiza II</u>, peto izdanje; Matematički fakultet, str. 179-220, 2008.

[4] N. Miličić, M. Obradović; <u>Zbirka zadataka iz više matematike</u>; Akademska misao, str. 15-25, 2005.